

## Vermessungsaufgaben

1. Wie hoch ist ein Sendemast, der bei einer Sonnenhöhe von  $33^{\circ}15'$  einen 50 Meter langen Schatten auf die horizontale Standfläche wirft?
2. Von einem 50 m hohen Turm sieht man in senkrechter Richtung die Ufer eines Flusses unter den Senkungswinkeln  $\alpha = 58,6^{\circ}$  und  $\beta = 28,9^{\circ}$ . Wie breit ist der Fluss?
3. Wie hoch ist das Kreuz auf einem 61 m hohen Kirchturm, wenn es mit einem Theodoliten, der 100 m vom Fuß des Turmes und 1 m über dem Niveau des Turmfußes steht, unter einem Sehwinkel von  $1,5^{\circ}$  gesehen wird?
4. Von einem Berggipfel sieht man 2 Punkte  $A$  und  $B$  im ebenen Flachland in derselben Richtung unter den Senkungswinkeln  $\alpha = 12,7^{\circ}$  und  $\beta = 36,5^{\circ}$ .  $A$  und  $B$  sind 2 km voneinander entfernt. Wie hoch liegt der Berggipfel über der Ebene?
5. Von einem Fenster eines Hauses misst man zur Firstspitze eines gegenüberstehenden Hochhauses den Höhenwinkel  $20,5^{\circ}$  und zum senkrecht darunterliegenden Fußpunkt den Tiefenwinkel  $31,3^{\circ}$ . Das Fenster befindet sich 48,4 m über dem horizontalen Platz zwischen den beiden Häusern. Wie hoch ist das Hochhaus und wie breit ist der Platz zwischen den Häusern?
6. Von einem horizontalen Weg im Tal sieht man die Gipfel zweier Berge unter den Erhebungswinkeln  $33^{\circ}$  und  $37,44^{\circ}$  übereinander. Geht man 1 km auf die Berggipfel zu, so decken sie sich und erscheinen unter dem gemeinsamen Erhebungswinkel von  $45^{\circ}$ . Wie weit sind die Gipfel voneinander entfernt?
7. Unmittelbar am Ufer eines Flusses wurde eine Standlinie  $c$  von 270 m abgesteckt. In ihren Endpunkten werden zwischen Standlinie und den Visierlinien zu einem am Gegenufer stehenden Baum die Winkel  $43,1^{\circ}$  und  $27,6^{\circ}$  gemessen. Wie breit ist der Fluss an dieser Stelle?
8. Um die Höhe eines über einer Ebene aufragenden Berges zu ermitteln, wird in der Ebene quer zur Blickrichtung zum Berg eine Standlinie  $s = \overline{AB} = 312,5$  m abgesteckt. Die Horizontalwinkel zwischen der Standlinie und den Visierlinien zum Fußpunkt der Bergspitze sind im Endpunkt  $A$  :  $54,28^{\circ}$  und im Endpunkt  $B$  :  $46,65^{\circ}$ . Der Höhenwinkel im Punkt  $A$  zur Bergspitze beträgt  $71,14^{\circ}$ . Berechne die Höhe des Berges über der Ebene!
9. Vom Gipfel eines Berges sieht man die Spitze eines Turmes der Höhe  $h = 60$  m unter dem Tiefenwinkel  $\alpha = 32,20^{\circ}$ , den Fußpunkt dieses Turmes unter dem Tiefenwinkel  $\beta = 39,77^{\circ}$ . Wie hoch liegt die Spitze des Berges über der Ebene in der sich der Turm befindet?

10. Zwei Geländepunkte  $A$  und  $B$  werden von der Spitze eines  $h = 112$  m hohen Turmes in derselben Vertikalebene unter den Tiefenwinkeln  $\alpha = 29,5^\circ$  und  $\beta = 44,48^\circ$  gesehen. Ermittle die Entfernung  $\overline{AB}$ !
11. Von der Spitze eines  $h = 62$  m hohen Turmes sieht man den Geländepunkt  $A$  unter dem Tiefenwinkel  $\alpha = 24,22^\circ$  und nach Schwenken des Fernrohrs um den Horizontalwinkel  $\varphi = 76,38^\circ$  den Geländepunkt  $B$  unter dem Tiefenwinkel  $\beta = 29,93^\circ$ . Ermittle die Entfernung  $\overline{AB}$ !
12. Von den Endpunkten der Standlinie  $\overline{AB} = 100$  m werden die horizontalen Winkel  $\angle FAB = 75,20^\circ$  und  $\angle FBA = 48,6^\circ$  zum Fußpunkt  $F$  eines lotrechten Mastes gemessen. Von  $B$  aus misst man den Höhenwinkel  $\beta = 14^\circ$ . Ermittle die Höhe des Mastes!
13. Die Spitze eines 18 m hohen Kirchturms wird von einem Aussichtspunkt unter einem Tiefenwinkel  $\alpha = 11,82^\circ$  gesehen. Wie weit ist die Turmspitze vom Beobachter entfernt, wenn vom Fußpunkt des Turmes zum Aussichtspunkt ein Höhenwinkel  $\beta = 15,2^\circ$  gemessen wird?
14. Zur Berechnung der Breite eines Flusses wird an einem Ufer die Standlinie  $\overline{AB} = 60$  m abgesteckt. Von den Endpunkten dieser Standlinie werden zu einer Messstange  $S$  am anderen Ufer die Winkel  $\angle ABS = 52,47^\circ$  und  $\angle BAS = 60,43^\circ$  gemessen. Wie breit ist der Fluss?
15. Von einem Viereck kennt man die Seitenlänge  $AB = a = 10$  cm,  $BC = b = 7$  cm,  $CD = c = 3$  cm,  $AD = d = 5$  cm und den Winkel  $\alpha = \angle DAB = 65^\circ$ .
- (a) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks!
- (b) Wie lang sind die Parallelseiten eines gleichschenkeligen Trapezes, das zum gegebenen Viereck flächengleich ist und die Seite  $AD$  und den Winkel  $\alpha$  gemeinsam hat, wobei  $AD$  ein Schenkel des Trapezes ist?

[31,12 cm<sup>2</sup>, 4,76 cm, 8,98 cm ]

16. Ein Ballon  $X$  schwebt in  $h$  Meter Höhe über waagrechttem Gelände.
- (a) Man visiert vom Ballon aus zwei Orte  $A$  und  $B$  unter dem Tiefenwinkel  $\alpha$  und  $\beta$  an. Die scheinbare Entfernung der beiden Orte, das ist der Winkel  $\angle AXB$ , beträgt  $\gamma$ . Gib eine Formel für die Berechnung der Entfernung  $AB$  in Abhängigkeit von  $h$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  an.  
Berechne  $AB$  für  $h = 460$  m,  $\alpha = 25,5^\circ$ ,  $\beta = 31,3^\circ$  und  $\gamma = 118,4^\circ$ .
- (b) Wie groß ist in diesem Fall der Winkel  $\varepsilon$  zwischen den Vertikalebene durch den Ballon und die jeweiligen Orte?

(c) Die Spitze eines Kirchturms wird vom Ballon aus unter dem Tiefenwinkel  $\mu$  gesehen. Nähert man sich dem Turm um  $d$  Meter, so beträgt der Tiefenwinkel  $\varphi$ .

Gib eine Formel für die Berechnung der Kirchturmhöhe in Abhängigkeit von  $h$ ,  $d$ ,  $\mu$  und  $\varphi$  an und berechne diese Höhe für  $h=460\text{ m}$ ,  $d=100\text{ m}$ ,  $\mu=27,1^\circ$  und  $\varphi=30,6^\circ$ ,

[1681 m,  $155,07^\circ$ , 80,15 m]

17. Von einem Viereck ABCD kennt man  $a=AB=7\text{ cm}$ ,  $c=CD=11,5\text{ cm}$ ,  $d=DA=5\text{ cm}$ ,  $\alpha=90^\circ$  und  $\beta=120^\circ$ .

Berechne  $b=BC$ , die fehlenden Winkel und den Flächeninhalt des Vierecks!

[8,51 cm,  $48,1^\circ$ ,  $101,9^\circ$ ,  $53,921\text{ cm}^2$ ]

18. Von einem Punkt P aus erscheint eine Turmspitze A unter dem Höhenwinkel  $\alpha=18,45^\circ$ . Die Turmspitze A wird von einer genau dahinterliegenden 2. Turmspitze B überragt. Der zu B gemessene Höhenwinkel ist um  $\beta=6^\circ$  größer. Nähert man sich den Türmen um  $s=150\text{ m}$ , so überdecken einander die Spitzen und erscheinen unter einem Höhenwinkel von  $\gamma=42,5^\circ$ .

Wie groß ist der Höhenunterschied der Türme und ihre horizontale Entfernung voneinander?

[56,67 m, 61,85 m]

19. Von einem Punkt P aus erblickt man die Strecke AB unter dem Winkel  $\angle APB=\delta=103,75^\circ$ ; die Entfernungen  $PA=a=430\text{ m}$  und  $PB=b=580\text{ m}$  sind bekannt. Auf dieser Strecke AB liegen 2 Punkte C und D, wobei C näher bei A liegt.

Bestimme mit Hilfe der gemessenen Winkel  $\angle APC=\alpha=20,07^\circ$  und  $\angle DPB=\beta=39,93^\circ$  die Entfernung der beiden Punkte C und D sowie deren Abstand von A.

[244,1 m, 163,03 m, 407,13 m]

20. Zwischen zwei Punkten P und Q soll ein Schrägseil gespannt werden, wobei Q höher als P gelegen ist. Um die Seillänge zu ermitteln, sucht sich ein Beobachter eine horizontale Standlinie AB genau unter dem Seil. Er mißt die Höhenwinkel  $\angle PAB=\alpha=131,8^\circ$ ;  $\angle QAB=\beta=40,45^\circ$ ;  $\angle ABP=\gamma=30,25^\circ$  und  $\angle ABQ=\delta=128,1^\circ$ . Die Länge der Standlinie AB beträgt 10 m.

Berechne die Länge des Seiles, die Höhe p und q der Punkte P und Q über dem Erdboden und den Neigungswinkel  $\varepsilon$  des Seiles!

[43,24 m, 12,19 m, 25,72 m,  $18,24^\circ$ ]

21. Ein Grundstück hat die Form eines Trapezes mit den beiden Parallelseiten  $a=320\text{ m}$  und  $c=210\text{ m}$ . Die Winkel an der größeren Parallelseite sind  $\alpha=78,3^\circ$  und  $\beta=68,4^\circ$ .

Wie groß ist der Flächeninhalt und der Umfang des Grundstücks?

[ $48340\text{ m}^2$ , 912,49 m]

22. Von der Spitze eines Berges werden die Tiefenwinkel  $\alpha_1 = 25,2^\circ$  und  $\beta_1 = 36^\circ$  zur Spitze und zum Fußpunkt eines 25 m hohen Turmes  $T_1$  gemessen. Schwenkt man den Theodoliten um den Horizontalwinkel  $\gamma = 42,6^\circ$ , so erblickt man die Spitze eines zweiten Turmes  $T_2$  unter dem Tiefenwinkel  $\alpha_2 = 31,8^\circ$  und seinen Fußpunkt unter  $\beta_2 = 40^\circ$ . Beide Türme stehen auf einer horizontalen Ebene.

Berechne die relative Höhe des Berges  $h$ , die Höhe des Turmes  $T_2$  und die Entfernung der beiden Fußpunkte von  $T_1$  und  $T_2$ !

[70,96 m, 18,5 m, 67,3 m]

23. Zwei in derselben Horizontalebene liegende Orte  $O_1$  und  $O_2$  sollen durch eine geradlinige Straße miteinander verbunden werden. Zwischen  $O_1$  und  $O_2$  befindet sich ein Berg, sodaß die Gerade  $O_1O_2$  nicht direkt abgesteckt werden kann. Es wird daher ein Hilfspunkt  $P$  gewählt. Die Strecke  $O_1P=a=2140$  m und  $O_2P=b=3165$  m sowie der Winkel  $\angle O_1PO_2 = \alpha = 94,6^\circ$  werden gemessen. Von  $P$  aus können Anfangspunkt  $A$  und Endpunkt  $E$  des Tunnels anvisiert werden. Man mißt die Winkel  $\angle O_1PA = \beta = 23,7^\circ$  und  $\angle EPO_2 = \gamma = 19,3^\circ$ .

Berechne die Länge des Tunnels! (Angabe in Meter, auf 1 Dez. genau)

[1746,3 m]

24. Ein gerader Weg steigt von einem Ort  $A$  aus gleichmäßig unter dem Höhenwinkel  $\varepsilon = 9,8^\circ$  bis zum Fußpunkt  $C$  einer Felswand an. Die Felswand ist unter einem Winkel  $\gamma = 72,5^\circ$  gegen die Horizontale geneigt. Von  $A$  aus sieht man die Spitze  $S$  der Wand unter dem Höhenwinkel  $\alpha = 33,6^\circ$ , geht man 650 m näher zur Wand hin, so sieht man von diesem neuen Punkt  $B$  die Spitze der Wand unter dem Höhenwinkel  $\beta = 50,4^\circ$ .

Berechne die Entfernung des Punktes  $B$  vom Fußpunkt  $C$  der Wand, die Länge  $CS$  der Wand, die relative Höhe der Spitze  $S$  über  $C$ ,  $S$  über  $A$  und  $C$  über  $A$ .

[384,23 m, 665 m, 810 m, 176 m]

25. Von einem Aussichtspunkt, der 60 m über einem See liegt, sieht man die Spitze eines Berges unter dem Höhenwinkel von  $\alpha = 31,6^\circ$  und das Spiegelbild der Bergspitze unter einem Tiefenwinkel von  $\beta = 36,3^\circ$ .

Wie hoch liegt die Bergspitze über dem Niveau des Sees?

[678,46 m]

Weitere Lösungen: 1.) 32,78 m, 2.) 60,1 m, 3.) 3,6 m, 4.) 648 m, 5.)  $h = 78,73$  m  $b = 80,18$  m, 6.) 2000 m, 7.) 90,6 m, 8.) 677,5 m, 9.) 245 m, 11.) 157,4 m, 12.) 29 m, 13.) 294,62 m, 14.) 44,93 m,